5°/ on a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\begin{cases} u_n + v_n = 3 \\ u_n - v_n = w_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \dfrac{3+w_n}{2} \\ v_n = \dfrac{3-w_n}{2} \end{cases}$

Or $w_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \frac{1}{2}\left(3-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ et $v_n = \frac{1}{2}\left(3+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Solution 7 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 < U_n < V_n$.

• Pour $n = 0$ on a : $0 < U_0 < V_0$ (car $U_0 = 1$ et $V_0 = 2$).

• Supposons que pour un entier donné n on a : $0 < U_n < V_n$ et montrons que $0 < U_{n+1} < V_{n+1}$.

$U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n + V_n}$ est le quotient de réel strictement positifs d'où $U_{n+1} > 0$.

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} - \frac{U_n+V_n}{2}$$

$$= \frac{4U_nV_n - (U_n+V_n)^2}{2(U_n+V_n)} = \frac{-(U_n-V_n)^2}{2(U_n+V_n)} < 0$$

d'où $U_{n+1} < V_{n+1}$ et par suite $0 < U_{n+1} < V_{n+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 < U_n < V_n$.

2°/ a) • $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2U_nV_n}{U_n+V_n} - U_n = \dfrac{U_nV_n - U_n^2}{U_n+V_n} = \dfrac{U_n(V_n-U_n)}{U_n+V_n}$

on a : $0 < U_n < V_n$ d'où $U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est une suite croissante.

• $V_{n+1} - V_n = \dfrac{U_n+V_n}{2} - V_n = \dfrac{U_n - V_n}{2}$

or $U_n < V_n$ d'où (V_n) est une suite décroissante.

b) On a : $U_n \leq V_n$ et $V_n \leq V_0$ (car (V_n) est une suite décroissante) d'où $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_n \leq 2$.

(U_n) est une suite croissante, majorée par 2 donc (U_n) est convergente.

(V_n) est une suite décroissante, minorée par 0 donc (V_n) est convergente.